Mit gemischten Normalverteilungen gegen Bären

Hohe Korrelationen bestehen oft gerade in fallenden Märkten. Dieser Beitrag beleuchtet dieses Phänomen und zeigt, dass es sich über sogenannte gemischte Normalverteilungen gut abbilden lässt. Ein erheblicher Vorteil dieser Verteilungen sind die ökonomische Interpretierbarkeit und der Rückgriff auf bereits etablierte Konzepte.

Gastbeitrag von Dr. Markus Haas und Professor Stefan Mittnik
Mitarbeiter und Lehrstuhlinhaber des Seminars für Finanzökonometrie am Institut für Statistik der Ludwig-Maximilian-Universität, München

Die Korrelationsmatrix ist ein wichtiger Parameter in der Konstruktion effizienter Portfolios im Sinne der Markowitzschen Portfoliotheorie. Denn die Stärke der Korrelationen entscheidet darüber, in welchem Umfang das Risiko eines Portfolios durch Diversifikation gesenkt werden kann. Sind die Korrelationen schwach, so lassen sich die Auswirkungen negativer Schocks in einzelnen Märkten durch Risikostreuung wirksam kontrollieren. Sind die Korrelationen jedoch stark, treffen Schocks tendenziell alle relevanten Märkte und können nicht „wegdiversifiziert" werden. Dieser einfache und doch grundlegende Gedanke macht die Lehre von den effizienten Portfolios zu einem für die Praxis besonders relevanten Stück Wirtschaftstheorie. Bei der Anwendung stellt sich allerdings ein Problem: Die Korrelationen sowie natürlich auch die erwarteten Renditen und Volatilitäten sind unbekannt und müssen geschätzt werden. Im klassischen Modell (1) wird davon ausgegangen, dass der betrachtete Renditevektor in einer Periode t, R_t, einer zeitinvarianten Normalverteilung mit Mittelwertvektor μ und Kovarianzmatrix Σ folgt. Es gilt $R_t \sim \text{Normal}\ (\mu, \Sigma)$.

_Überschreitungsniveaus machen Asymmetrie sichtbar

Empirische Studien haben jedoch gezeigt, dass dieses einfache Modell (1) zur Modellierung der Korrelationen zwischen Wertpapierrenditen oftmals nicht geeignet ist, da es eine charakteristische Asymmetrie in der Abhängigkeitsstruktur vieler Märkte außer Acht lässt. Diese asymmetrische Korrelationsstruktur besteht darin, dass die Korrelationen in tendenziell fallenden Märkten stärker sind als in tendenziell steigenden Märkten. Die Bedeutung eines solchen Befunds für die Anwendung der Portfoliotheorie liegt indes auf der Hand. Denn er impliziert, dass die Vorteile der Diversifikation genau dann nicht realisiert werden können, wenn ihr Nutzen am größten wäre. Insbesondere werden Modelle der Form (1), bei denen die Existenz unterschiedlicher Korrelationsregime nicht berücksichtigt wird, dazu tendieren, die Korrelationen und damit auch das Portfoliorisiko in fallenden Märkten zu unterschätzen.

Ein besonders anschauliches Instrument zur Darstellung asymmetrischer Korrelationen in Bullen- und Bärenmärkten sind die von Longin und Solnik im Jahr 2001 in einem Aufsatz im „Journal of Finance" eingeführten Überschreitungskorrelationen, die wie folgt definiert sind. Betrachtet werden zwei Wertpapiere mit den Renditen R1 und R2 (in Prozent), deren Mittelwerte durch μ_1 und μ_2 gegeben sind. Die empirische Überschreitungskorrelation relativ zu einem gegebenen Überschreitungsniveau $\theta < 0$ (> 0) ist die Korrelation zwischen

Tabelle 1: Statistische Eigenschaften der monatlichen MSCI-Total-Return-Indizes*

Mittelwert		Volatilität		Korrelation
USA	Deutschland	USA	Deutschland	
0,910	0,817	4,360	5,610	0,520

* Die Tabelle zeigt die historischen Mittelwerte und Volatilitäten (Standardabweichungen) sowie den Korrelationskoeffizienten für die monatlichen (diskreten) prozentualen Renditen der MSCI-Total-Return-Indizes (lokale Währungen) für die Aktienmärkte der USA und Deutschlands. Die Stichprobe umfasst den Zeitraum von Januar 1970 bis Juni 2008 (462 Beobachtungen).

Quelle: Mittnik und Haas; © portfolio institutionell den Renditen in jenen Perioden, zum Beispiel Monaten, in denen beide Renditen θ Prozentpunkte unter (über) dem jeweiligen Mittelwert liegen. Für sie gilt sowohl $R_1 < \mu_1 + \theta$ $(R_1 > \mu_1 + 0)$ als auch $R_2 < \mu_2 + \theta$ $(R_2 > \mu_2 + 0)$. Ist etwa $\mu_1 = \mu_2 = 0$, so berechnet sich die Überschreitungskorrelation zum Niveau $\theta = -5\%$ als Korrelation zwischen den Wertpapierrenditen in all jenen Monaten, in denen beide Papiere einen Verlust von mindestens fünf Prozent realisiert haben. Abbildung 1 zeigt die Überschreitungskorrelationen für die monatlichen Renditen der MSCI-Total-Return-Indizes für die USA und Deutschland von Januar 1970 bis Juni 2008. Die Korrelationen weisen eine ausgeprägte asymmetrische Struktur auf, mit erheblich höheren Korrelationen für negative Überschreitungsniveaus. Dies kann als Indiz für spezifische Bullen- und Bärenmarktkorrelationen gedeutet werden.

Die Analyse bedingter Korrelationen erfordert allerdings eine gewisse Umsicht, denn selbst wenn eine zeitinvariante Normalverteilung über den gesamten Stichprobenzeitraum vorliegt, ist die Überschreitungskorrelation keine konstante Funktion des Überschreitungsniveaus. Die Tatsache allein, dass die empirischen Überschreitungskorrelationen nicht konstant und nicht identisch mit der unbedingten empirischen Korrelation in Tabelle 1 sind, ist also nicht ausreichend, um die Hypothese einer konstanten Korrelationsstruktur zurückzuweisen. Jedoch zeigt die Abbildung 1, dass die Überschreitungskorrelationen unter der Annahme der Normalverteilung, die mit Hilfe von Simulation ermittelt wurden, nicht nur symmetrisch sind, was zu erwarten gewesen ist, sondern mit wachsendem absoluten Überschreitungsniveau erstaunlicherweise sogar abnehmen. Dies ist der Fall, obgleich die zur Berechnung dieser Korrelationen herangezogenen Beobachtungspaare genau jene Monate repräsentieren, in denen sich beide Indizes gleichgerichtet verändert haben. Wie ist das nun zu erklären?

Die Formel für die Kovarianz (Cov) zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y, $Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ wobei $E(\cdot)$ den Erwartungswert bezeichnet, zeigt, dass diese große Werte annimmt, wenn große (kleine) Ausprägungen von X tendenziell mit großen (kleinen) Ausprägungen von Y zusammenfallen. Dabei ist der Maßstab für die Größe einer Ausprägung die Differenz zum jeweiligen Erwartungswert. Betrachtet man nun lediglich die Renditeausprägungen, die kleiner $(\theta < 0)$ oder größer $(\theta > 0)$ sind als ein gegebenes Überschreitungsniveau, so hat diese Teilmenge einen entsprechend kleineren oder größeren Mittelwert als die Gesamtstichprobe. Es ist somit a priori schwierig, Aussagen über den Verlauf der bedingten Kovarianz und damit der Überschreitungskorrelation zu machen. Für die Normalverteilung jedenfalls gilt das in Abbildung 1 gezeigte Verhalten allgemein, und für $\theta \to \infty$ gehen die Überschreitungskorrelationen gegen null.

Dies führt zu der Feststellung, dass die empirischen Befunde den Implikationen einer Normalverteilung mit konstanter Korrelation deutlich widersprechen. Im Folgenden wird daher ein Modell skizziert, mit dem die Abhängigkeitsstruktur der Renditen weitaus genauer erfasst werden kann und das sich seit einigen Jahren in der Finanzökonometrie großer Beliebtheit erfreut. Es handelt sich dabei um das Modell „gemischter Normalverteilungen", welches als Verallgemeinerung des Modells (1) betrachtet werden kann, indem nun explizit unterschiedliche Marktzustände (Regime) mit spezifischen Renditeerwartungen und -volatilitäten sowie Korrelationen zugelassen werden. Auf diese Weise kann die Abhängigkeitsstruktur der Renditen weiterhin mit Hilfe von Korrelationskoeffizienten beschrieben werden, wodurch die Interpretation in vielen Zusammenhängen erleichtert wird. Es sei ebenfalls bemerkt, dass durch diese Modellklasse auch die bei Renditen häufig beobachteten Verteilungseigenschaften der Schiefe und der schweren Ränder berücksichtigt werden.

_Marktregime sind relativ konstant

Wir gehen im Weiteren von drei möglichen Regimen aus, um neben einem „normalen" Marktzustand ein Bullen- und ein Bärenmarktregime identifizieren zu können. In Anlehnung an (1) ist dann: $R_t \mid s_t = j \sim \text{Normal}\ (\mu_{j,} + \Sigma_j)$, $j \in$ {Normal, Bullen, Bären}, wobei die Regimevariable s_t den gegenwärtigen Marktzustand anzeigt. Die Marktzustände sind weder direkt beobachtbar noch mit Sicherheit vorhersagbar. Daher müssen für das Modell (2) die Wahrscheinlichkeiten dafür spezifiziert werden, dass ein bestimmtes Regime zu einem gegebenen Zeitpunkt aktiviert wird. Eine einfache und doch empirisch recht erfolgreiche Spezifikation wird durch das Markov-Switching-Modell bereitgestellt. In diesem Modell hängen die Regimewahrscheinlichkeiten für die Periode t+1 vom gegenwärtig (in Periode t) aktivierten Regime ab, indem für jeden Marktzustand die Wahrscheinlichkeiten sowohl des Verbleibs im aktuellen Regime als auch eines Wechsels in alle übrigen Regime spezifiziert werden. Dies sind die sogenannten Übergangswahrscheinlichkeiten. Damit kann der plausible Sachverhalt erfasst werden, dass zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit eines Bärenmarktes im kommenden Monat am größten ist, wenn die Marktteilnehmer auch gegenwärtig unter einem solchen leiden. Dagegen kann dem Wechsel von einem Bullen- in einem Bärenmarkt vermutlich eine kleinere Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Aus diesen bedingten Wahrscheinlichkeiten lassen sich auch unbedingte, langfristige Wahrscheinlichkeiten ableiten, aus denen auf die Häufigkeit etwa eines Bärenmarktes über längere Zeiträume hinweg geschlossen werden kann.

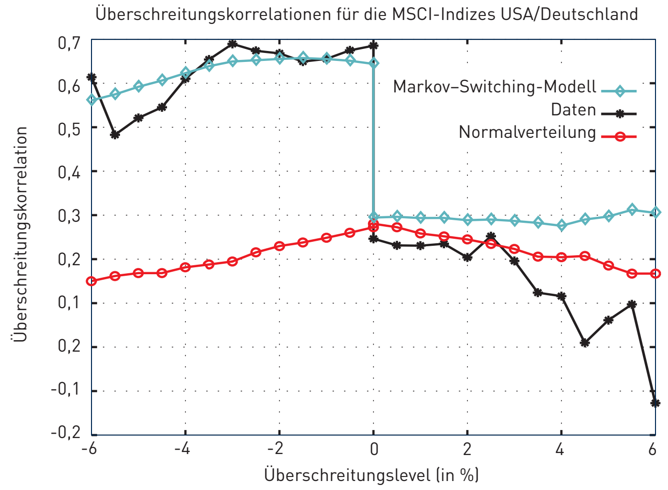
Tabelle 2: Geschätzte Parameter des Markov-Switching-Modells*

Erwartete Rendite		Volatilität		Korrelation	langfristige Wahrscheinlichkeit
USA	Deutschland	USA	Deutschland		
Regime 1 (Normales Regime)					
0,874	1,024	3,091	3,693	0,466	0,583
Regime 2 (Bullenmarktregime)					
3,479	2,593	4,482	5,810	-0,068	0,209
Regime 3 (Bärenmarktregime)					
-1,553	-1,528	5,593	8,338	0,798	0,208
Übergangswahrscheinlichkeiten					
		Normal(t)	Bullen(t)	Bären(t)	
	Normal(t+1)	0,940	0,168	0,000	
	Bullen(t+1)	0,038	0,729	0,165	
	Bären(t+1)	0,022	0,103	0,835	

* Gezeigt werden die Schätzergebnisse für das Markov-Switching-Modell (2) für die MSCI-Indizes (siehe Tabelle 1). Im unteren Teil der Tabelle werden die Wechsel- oder Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Regimen von Periode (Monat) t nach Periode t+1 wiedergegeben.

Quelle: Mittnik und Haas; © portfolio institutionell

Abbildung 1: Überschreitungskorrelationen für die MSCI-Indizes USA/Deutschland



Quelle: Mittnik und Haas, © portfolio institutionell

Es mag noch nützlich sein zu erwähnen, dass alle Parameter des Modells (2) gemeinsam mit den Übergangswahrscheinlichkeiten simultan mittels der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden. Insofern sprechen die Daten für sich. Insbesondere wird a priori keine Zuordnung der Beobachtungspunkte zu den einzelnen Regimen vorgenommen.

Die Schätzergebnisse für das Markov-Switching-Modell finden sich in Tabelle 2. Diese ermöglichen es, die Regime ohne Unschärfe zu klassifizieren. Dabei identifizieren wir ein Bärenmarktregime mit negativen erwarteten Renditen, relativ hohen Volatilitäten und einer deutlich über dem unbedingten Niveau liegenden Korrelation, während die Korrelation im Bullenmarktregime praktisch null beträgt. Sowohl das Bullenmarktregime als auch das Bärenmarktregime haben eine langfristige Wahrscheinlichkeit von etwa 20 Prozent. Die geschätzten Übergangswahrscheinlichkeiten, die im unteren Teil der Tabelle aufgeführt werden, unterscheiden sich allerdings deutlich von diesen langfristigen Häufigkeiten. Angezeigt werden die Wahrscheinlichkeiten, von einem bestimmten Regime in Monat t in ein anderes Regime in Monat t+1 zu wechseln. Zum Beispiel beträgt die Wechselwahrscheinlichkeit von einem Bullenregime in ein Bärenregime etwa zehn Prozent (0,103). Für jedes der drei Regime dominiert hier die Wahrscheinlichkeit, auch in der nächsten Periode im aktuellen Regime zu verweilen. Das kann als Persistenz der Regime charakterisiert werden.

Aufgrund der Ergebnisse in Tabelle 2 kann bereits vermutet werden, dass das Modell (2) die empirischen Überschreitungskorrelationen erheblich besser reproduziert als das einfache Modell (1), und ein erneuter Blick auf Abbildung 1 zeigt, dass dies in der Tat zutrifft. Die Asymmetrie in der empirischen Korrelationsstruktur wird durch das Mischungsmodell in befriedigender Weise erfasst. Offen bleibt zunächst die Frage, wie die verbesserte Modellierungsfähigkeit der diskutierten Modellklasse der Markov-Switching-Modelle für die Portfoliooptimierung fruchtbar gemacht werden kann.